

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a V-a

1. Fie numerele $m = (1 + 2 + 3)^4 + 5 \cdot 6 \cdot (7 + 8 + 9)$ și $n = 1 + 2 + 3 + \dots + 63$.

a) (3p) Calculați 2016^{m-n} .

b) (4p) Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural nenul care împărțit la n dă câtul egal cu un sfert din rest.

Prof. Stela Boghian

Soluție:

a) $m = 6^4 + 5 \cdot 6 \cdot 24 = 1296 + 720 = 2016$ și $n = 63 \cdot 64 : 2 = 2016 \Rightarrow 2016^{m-n} = 2016^0 = 1$.

b) Din teorema împărțirii cu rest avem $d = 2016 \cdot c + r$; $r < 2016$; cum $c = \frac{r}{4} \Rightarrow r$ trebuie să fie multiplu de 4. Cel mai mare număr se obține pentru $r = 2012$, iar cel mai mic număr nenul pentru $r = 4$. Numerele căutate sunt 1016060 și 2020.

Barem

a)	$m = 6^4 + 5 \cdot 6 \cdot 24 = 1296 + 720 = 2016$	1 p
	$n = 63 \cdot 64 : 2 = 2016$	1 p
	$\Rightarrow 2016^{m-n} = 2016^0 = 1$	1 p
b)	Din teorema împărțirii cu rest avem $d = 2016 \cdot c + r$; $r < 2016$; cum $c = \frac{r}{4} \Rightarrow r$ trebuie să fie multiplu de 4.	2 p
	Cel mai mare număr se obține pentru $r = 2012$, acesta este 1016060.	1 p
	iar cel mai mic număr nenul pentru $r = 4$; acesta este 2020.	1 p

2. Pătratul unui număr natural N de două cifre este un număr natural de trei cifre, care are cifra zecilor dată de suma dintre cifra unităților și cea a sutelor.

a) (3p) Arătați că cifra sutelor este egală cu cifra unităților.

b) (4p) Determinați toate numerele naturale N cu proprietatea din enunț.

Prof. Liliana Timofti

Soluție: a)

$N^2 = \overline{a(a+b)b} = 100a + 10(a+b) + b = 100a + 10a + 10b + b = 11(10a + b) = 11 \cdot \overline{ab} \Rightarrow N^2 : 11$. Cum 11 este număr prim, $\overline{ab} : 11$, de unde $a = b$.

b) Așadar: $N^2 = 11(10a + a) = 11^2 a \Rightarrow a = k^2$

Deoarece a este cifră nenulă și pătratul unui număr natural, rezultă $a \in \{1, 4, 9\}$.

Cum $N^2 = \overline{a(a+b)b} = \overline{a(2a)a}$, $2a$ este cifră și $a = 9 \Rightarrow 2a = 18$ care nu convine.

Așadar $a = 1 \Rightarrow N = 11$ sau $a = 4 \Rightarrow N = 22$.

Barem

a)	$N^2 = \overline{a(a+b)b} = 100a + 10(a+b) + b = 100a + 10a + 10b + b = 11(10a + b) = 11 \cdot \overline{ab}$	2 p
----	---	-----

	$\Rightarrow N^2 : 11$. Cum 11 este număr prim, $\overline{ab} : 11$, de unde $a = b$.	1 p
b)	$N^2 = 11(10a + a) = 11^2 a \Rightarrow a = k^2$	1 p
	Deoarece a este cifră nenulă și pătratul unui număr natural, rezultă $a \in \{1, 4, 9\}$.	1 p
	Cum $N^2 = \overline{a(a+b)b} = \overline{a(2a)a}$, $2a$ este cifră și $a = 9 \Rightarrow 2a = 18$ care nu convine.	1 p
	Așadar $a = 1 \Rightarrow N = 11$ sau $a = 4 \Rightarrow N = 22$	1 p

3. (7p) Se dau mulțimile $A = \{x / x = 11a - 3; a \in \mathbb{N}^*\}$ și $B = \{y / y = 103 - 2b; b \in \mathbb{N}\}$.

Determinați $A \cap B$.

G.M. nr. 11/2015

Soluție: $A \cap B$ conține elementele comune, deci $x = y \Rightarrow 11a - 3 = 103 - 2b \Rightarrow 11a + 2b = 106$. Cum $2b$ și 106 sunt numere pare, rezultă că și $11a$ este număr par, adică a este număr par. El fiind și nenul, rezultă că $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, pentru valori mai mari relația $11a + 2b = 106$ nu poate fi îndeplinită în \mathbb{N} . În concluzie $A \cap B = \{19, 41, 63, 85\}$.

Barem

$A \cap B$ conține elementele comune, deci $x = y \Rightarrow 11a - 3 = 103 - 2b \Rightarrow 11a + 2b = 106$.	2 p
Cum $2b$ și 106 sunt numere pare, rezultă că și $11a$ este număr par, adică a este număr par	2 p
El fiind și nenul, rezultă că $a \in \{2, 4, 6, 8\}$, pentru valori mai mari relația $11a + 2b = 106$ nu poate fi îndeplinită.	2 p
În concluzie $A \cap B = \{19, 41, 63, 85\}$.	1 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.